Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 3 (1968) 159—166.

О ПОДОБНЫХ КРИТЕРИЯХ И ДОПУСТИМЫХ ОЦЕНКАХ СТАЦИОНАРНОГО ГАУССОВСКОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

M. ARATÓ

1. Во многих важных задачах математической статистики, подлежащих проверке гипотезы, требуются критерии $\varphi(X)$, для которых

$$\mathsf{M}_\theta \varphi(X) = \alpha \tag{1}$$

при всех распределиях X (где X обозначает „наблюдение"), принадлежащих заданному семейству $\mathscr{P} = \{\mathsf{P}_\theta^X, \theta \in \Omega\}$. По этому поводу см. книги [5] и [6]. Критерии удовлетворяющие условию (1) называются *подобнымы* по отношению к семейству распределений P_θ^X, $(\theta \in \Omega)$, или, короче, по отношению к параметрическому множеству Ω[1].

Если T достаточная статистика для параметра θ (или для семейства $\mathscr{P}$) и $\mathscr{P}^T$ означает семейство $\{\mathsf{P}_\theta^T, \theta \in \Omega\}$ распределений T, тогда любой критерий φ, для которого

$$\mathsf{M}[\varphi(X) | T = t] = \alpha, \tag{2}$$

с точностью до P^T-меры нуль, оказывается подбным, так как

$$\mathsf{M}_\theta \varphi(X) = \mathsf{M}_\theta(M[\varphi(X) | T = t]) = \alpha, \quad \text{при} \quad \theta \in \Omega. \tag{3}$$

О критериях, удовлетворяющих (2), говорят, что они имеют неймановскую структуру относительно T.

Ещё напомним, что семейство вероятностных мер $\mathscr{P} = \{\mathsf{P}_\theta, \ \theta \in \Omega\}$ называется *полным* (см. LEHMANN [5] стр. 182, или Линник [6] стр. 81), если из соотношения

$$\mathsf{M}_\theta f(x) = 0, \quad \text{при} \quad \theta \in \Omega \tag{4}$$

следует, что измеримая функция

$$f(x) = 0 \quad \text{почти всюду } \mathsf{P}_\theta, \ \theta \in \Omega.$$

Семейство называется *ограниченно полным*, если любая измеримая ограниченная функция $f(x)$ при условии (4) почти всюду равна 0. Нам нужно следующее утверждение, принадлежащее Леману и Шеффе:

Теорема 1. *Пусть дано семейство распределений $\mathscr{P} = \{P_\theta, \theta \in \Omega\}$ и T достаточная статистика для $\mathscr{P}$. Тогда для того, чтобы все подобные критерии*

[1] Здесь и в дальнейшем рассматриваются рандомизованные критерии $\varphi(X)$, т. е. если X принимает значение x, то производится случайный эксперимент с двумя возможными исходами: H и $\bar{H}$, вероятности которых равны $\varphi(x)$ и $1-\varphi(x)$. В случае H гипотеза отвергается, а в противном случае принимается. $\varphi(X)$ называется *критической функцией*, $0 \leqq \varphi(X) \leqq 1$ при всех x.

имели наймановскую структуру относительно T, необходимо и достаточно, чтобы семейство $\mathscr{P}^T$, распределений T, было ограниченно полным.

Доказательство можно найти в [5] стр. 185 или в [6] стр. 82. В этой заметке рассматривается стационарный гауссовский марковский процесс с непрерывным и дискретным временем. В непрерывном случае, при предположении $\mathsf{M}\xi(t)=0$ и $\mathsf{M}\xi(t)\xi(s) = \frac{1}{2\lambda}\exp(-\lambda|t-s|)$, мы имеем для процесса $\xi(t)$, $0 \leqq t \leqq T$,

$$(5)\qquad \frac{dP}{dV} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\exp\left\{-\lambda\left[\frac{\xi^2(0)+\xi^2(T)}{2} - \frac{T}{2} + \frac{\lambda}{2}\int_0^T \xi^2(t)\,dt\right]\right\}, \qquad \lambda>0,$$

(см. [1] и [8]), где $V = L\times W$, L-обычная лебеговская мера на прямой, а W — известная условная мера Винера. „Наблюдение" X в этом случае является реализацией процесса $\xi(t)$ в промежутке времени $0\leqq t\leqq T$.

В случае с дискретным временем, при предположении $\mathsf{M}\xi(k)=0$, $\mathsf{M}\xi^2(k)=1$ плотность вероятностных величин $\zeta(1), \zeta(2), \ldots, \zeta(n)$ имеет вид

$$(6)\qquad (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(1-\varrho^2)^{-\frac{n-1}{2}}\exp - \frac{1}{2(1-\varrho^2)}\left\{x_1^2+x_n^2+(1+\varrho^2)\sum_2^{n-1}x_i^2 - 2\varrho\sum_1^{n-1}x_ix_{i+1}\right\},$$

где $\varrho = \mathsf{M}\xi(k)\xi(k+1)$, $(-1<\varrho<1)$.

Семейства $\{\mathsf{P}_\varrho, -1<\varrho<1\}$ и $\{\mathsf{P}_\lambda, \lambda>0\}$ являются *экспоненциальными*. Из теоремы факторизации следует, что в случае непрерывного времени существует 2-мерная достаточная статистика

$$(7)\qquad \chi_1 = \frac{\xi^2(0)+\xi^2(T)}{2}, \qquad \chi_2 = \frac{1}{T}\int_0^T \xi^2(t)\,dt,$$

а в случае дискретного времени 3-мерная достаточная статистика

$$(8)\qquad T_1 = \frac{\xi^2(1)+\xi^2(n)}{2}, \qquad T_2 = 2\sum_1^{n-1}\xi(i)\xi(i+1), \qquad T_3 = \sum_2^{n-1}\xi^2(i).$$

Известно (см. [5] стр. 78), что распределения величин $\chi=(\chi_1,\chi_2)$ соотвественно $T=(T_2, T_2, T_3)$ принадлежат экспоненциальному семейству и имеют вид (плотности вероятности):

$$(9)\qquad p_\lambda(t_1,t_2) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\exp - \{\lambda t_1 + \lambda^2 t_2\}\cdot h(t_1,t_2)$$

при $t_1\cdot t_2>0$, соотвественно

$$(10)\; p_\varrho(t_1,t_2,t_3) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(1-\varrho^2)^{-\frac{n-1}{2}}\exp - \frac{1}{1-\varrho^2}\{t_1-\varrho t_2+(1+\varrho^2)t_3\}\,h(t_1,t_2,t_3)$$

(где $t_1>0$, $t_3>0$).

Функция $h(t_1,t_2)$ в явном виде неизвестна, но знаем характеристическую функцию плотности вероятности $p_\lambda(t_1,t_2)$, которая имеет вид

$$(11)\qquad f_\lambda(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{2\sqrt{\lambda T}(\lambda^2T^2-2i\alpha_2T)^{1/4}e^{\frac{\lambda T}{2}}}{\left[(\lambda T - i\alpha_1T+\sqrt{\lambda^2T^2-2i\alpha_2T})^2e^{\sqrt{\lambda^2T^2-2i\alpha_2T}} - (\lambda T - i\alpha_1 T - \sqrt{\lambda^2T^2-2i\alpha_2T})^2e^{-\sqrt{\lambda^2T^2-2i\alpha_2T}}\right]^{1/2}}$$

Из этого выражения видно, что $h(t_1,t_2)>0$ при $t_1, t_2>0$.

А. Н. Колмогоров ещё в 1960 г. поставил задачу найти в этих случаях подобные множества (подобные критерии). Я в своей диссертации [2] в 1962 г. показал, что в данном случае можно использовать интересный метод R. A. WIJSMAN-а. Статья Вийсмана вскрывала интересные связи между статистикой и теорией уравнений в частных производных. Этот метод позже получил широкое признание, о котором существует красивая книга Ю. В. Линника [6]. В моей диссертации я показал, что семейства (9) и (10) не являются ограниченно полными. Из этого факта и из теоремы 1. следует, что все подобные критерии, не имеющие неймановскую структуру, представляются в виде

$$(12)\qquad g(T)+\alpha,$$

где $\mathsf{M}_\theta g(T)\equiv 0$ $(\theta\in\Omega)$. (Здесь θ используется вместо ϱ и λ). На самом деле, если $\Phi(X)$ является подобным критерием, то функция $f(X) = \mathsf{M}(\Phi|T)-\alpha$ такая, что $\mathsf{M}_\theta g(T) = \mathsf{M}_\theta f(x) = 0$ при всех $\theta\in\Omega$, где по определению $g(T(x)) = f(x)$. Отсюда видно, что все подобные критерии имеют вид (12). Ниже мы докажем утверждение, что семейства (9) и (10) не являются ограниченно полными, но докажем ещё и теорему о представлении подобных критериев.

2. Имеет место следующее утверждение

Теорема 2. 1. *Экспоненциальное семейство* (9) *не является ограниченно полным.*

Доказательство. Для доказательства строим функцию $F(t_1,t_2) = P(t)$, которая ограничена, исчезает вне куба R $(R\subset T_1\times T_2,\ t_1,t_2>0)$, и для которой преобразование Лапласа $\mathscr{L}(F)$ исчезает при $\lambda>0$

$$(2.1)\qquad \int_0^\infty\int_0^\infty F(t_1,t_2)e^{-(\lambda t_1+\lambda^2t_2)}\,dt_1\,dt_2 \equiv 0 \qquad (\text{при } \lambda>0).$$

Возьмем для этой цели дважды непрерывно дифференцируемую функцию $G(t_1,t_2)$ внутри R, исчезающую вне R, у которой все частные производные непрерывны на границе R. Введем дифференциальный оператор

$$(2.2)\qquad D = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}+\frac{\partial}{\partial t_2},$$

то в силу свойства $G(t_1,t_2)$

$$(2.3)\qquad \mathscr{L}(DG) = (\lambda^2-\lambda^2)\mathscr{L}(G) \equiv 0.$$

Таким образом функция $F(t_1, t_2) = DG(t_1, t_2)$ удовлетворяет условию (2. 1), а функцию

$$F(\chi_1, \chi_2) \over h(\chi_1, \chi_2)} = \frac{DG(\chi_1, \chi_2)}{h(\chi_1, \chi_2)} \tag{2. 4}$$

можно использовать для построения подобного критерия, не имеющего неймановскую структуру:

$$\Phi(\chi) = \alpha + \frac{F(\chi)}{h(\chi)}. \tag{2. 5}$$

В роль $G(t_1, t_2)$ можно взять, например, следующую функцию (или линейную комбинацию таких функций): пусть куб R задан условиями

$$R: (0<) a_1 < t_1 < a_1 + l; \quad (0<) a_2 < t_2 < a_2 + l$$

и возьмем $G(t) = \prod_1^2 (t_i - a_i)^2 (a_i + l - t_i)^2$ при $(t_1, t_2) \in R$ и $G(t) = 0$ при $t \in R$. Естественно возникает вопрос, можно ли таким образом, т. е. с помощью метода Вийсмана, получить все подобные критерии? Полное описание подобных критерий ясно связана задачей отысканием всех предкотестов (или котестов) в смысле Линника (см. [6] стр. 107, 137). Если $\varphi(X)$ рандомизованный подобный критерий (тест) уровня α $(0 < \alpha < 1)$, то *котестом* называется любая статистика вида $\psi = A(\varphi - \alpha)$, где A константа. *Предкотестом* уровня α будем называть любую статистику $\xi(X)$ с конечным математическим ожиданием и

$$\mathsf{M}_\theta \xi(x) \equiv 0, \quad \text{при} \quad \theta \in \Omega.$$

Нахождение всех котестов ψ можно задать в форме

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \frac{\partial}{\partial t_2}\right) G = h\psi, \tag{2. 6}$$

где ψ котест уровня α и G решение уравнения (2. 6). Уравнение является параболическим уравнением, похоже на уравнение теплопроводности в одномерном пространстве, где t_2 является временем, t_1 местом, G температурой, а $\psi \cdot h$ источником тепла. Если бы имели дело с обычной задачей теплопроводности, то решение можно было бы записать с помощью соответсвующей функции Грина. Так как дифференциальный оператор D является оператором с постоянными коэффициентами, можно использовать общие результаты теории дифференциальных уравнений (см. [7]).

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. 2. *Любой котест ψ (где $\psi h \in L_2$), уровня α, представляется в виде*

$$\psi = \frac{1}{h} DG,$$

где G принадлежит L_2 вместе со своим градиентом (в смысле обобщенных функций) и G обращается в нуль вне некоторого компакта $T_1 \times T_2$ $(t_1, t_2 > 0)$.

Доказательство, в таком виде, сразу следует из теоремы 2. 1 и леммы 1. 7 Хермандера [10].

Замечание. Более глубокое утверждение о представлении всех котестов ψ (уже не принадлежащих L_2) также имеет место, но для этого надо использовать более тонкие рассуждения Паламадова [7], кто первым обратил внимание на результаты Хермандера.

3. В случае с дискретным временем рассматривается дифференциальный оператор

$$D^* = \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_3} + \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \tag{3. 1}$$

и легко доказывается утверждение:

Теорема 3. 1. *Экспоненциальное семейство* (10) *не является ограниченно полным.*

Точно так же, как в пункте 2, доказывается

Теорема 3. 2. *Любой котест ψ $(\psi h \in L_2)$, уровня α, представляется в виде*

$$\psi = \frac{1}{h} D^* G,$$

где G принадлежит L_2, с компактным носителем, принадлежащим int $(t_1, t_3 > 0)$.

4. В этом пункте рассматриваем несмещенные оценки λ и ϱ экспоненциальных семейств (5) и (6). Хорошо известно (см. Колмогоров [4] и Линник [6] стр. 56—57), что для широкого круга вопросов возможно ограничиться лишь несмещенными оценками, зависящими от достаточных статистик.

В нашем случае семейство мер достаточных статистик $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ и $T = (T_1, T_2, T_3)$ не является ограниченно полным, поэтому любая статистика $\xi(\chi)$ или $\xi(T)$, для которой существуют математическое ожидание

$$\mathsf{M}_\theta \xi = f(\theta)$$

и дисперсия

$$\mathsf{D}_\theta^2 \xi = \mathsf{M}_\theta (\xi - f(\theta))^2,$$

при $\theta \in \Omega$, является несмещенной оценкой функции $f(\theta)$, но не является единственной оценкой.

Как известно, для описания всех несмещенных оценок $f(\theta)$ достаточно найти одну и, кроме того, все несмещенные оценки нуля (Н. О. Н). Напомним, что несмещенная оценка ξ называется допустимой на компакте Ω_0, если нет такой Н. О. Н. η, что $\mathsf{D}_\theta^2(\xi + \eta) \leqq \mathsf{D}_\theta^2(\xi)$ при $\theta \in \Omega_0$, причем хотя бы для одного θ имеет место неравенство. Оценка ξ называется наилучшей на Ω_0, если $\mathsf{D}_\theta^2(\xi + \eta) \geqq \mathsf{D}_\theta^2(\xi)$ для любой Н. О. Н. η.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 4. 1. *Для любого полинома* $Q(\chi_1, \chi_2)$ ($\neq$ const) *найдется такой компакт* Λ_0 *значений параметра* λ, *что на нем* Q *является недопустимой оценкой функции* $\mathrm{M}_\lambda Q(\chi_1, \chi_2) = f(\lambda)$.

Доказательство. Мы будем применять некоторые соображения типа метода Вийсмана, которые использовались Каганом для неполных экспоненциальных семейств, при некоторых дополнительных ограничений (см. [6] гл. VII. 3.). Пусть $\psi_0(\chi_1, \chi_2)$ функция, удовлетворяющая условиям

1. $\psi_0 > 0$ при $\chi \in R$

2. $\psi_0 = 0$ при $\chi \in R$

3. ψ_0 всюду непрерывна и имеет не менее $2k_1 + 3k_2$ частных производных по каждому аргументу, и все производные обращаются в нуль на границе R.

Здесь R означает в пространстве χ ограниченный замкнутый куб, в котором $h(\chi) \geqq \varepsilon_0 > 0$ (такой куб существует). $m \geqq 1$ степень полинома Q и $a_{k_1 k_2} \chi_1^{k_1} \chi_2^{k_2}$ один из его старших членов ($a_{k_1 k_2} \neq 0$, $k_1 + k_2 = m$). В дальнейшем вместо λ пишем λ_1, а вместо λ^2 пишем λ_2 ($\lambda_2 = \lambda_1^2$ условие рассматривается позже).

Пусть

$$\psi(t_1, t_2) = w\psi_0(t_1, t_2), \tag{4.1}$$

где дифференциальный оператор

$$w = \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \frac{\partial}{\partial t_2}\right)^m \tag{4.2}$$

применим к функции $\psi_0(t_1, t_2)$ в силу условия 3). Тогда преобразование Лапласа функции ψ равно

$$\iint \psi(t_1, t_2)\, \bar{e}^{(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)}\, dt_1\, dt_2 = \iint w\psi_0\, \bar{e}^{(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)}\, dt_1\, dt_2 = (\lambda_1^2 - \lambda_2), \tag{4.3}$$

где

$$V(\lambda_1, \lambda_2) = \iint \psi_0(t_1, t_2)\, \bar{e}^{(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)}\, dt_1\, dt_2.$$

Если

$$\eta = \begin{cases} \dfrac{\psi(\chi)}{h(\chi)}, & \text{при} \quad \chi \in R \\ 0, & \text{при} \quad \chi \in R, \end{cases} \tag{4.4}$$

то при условии $\lambda_1^2 = \lambda_2$ η является Н. О. Н.:

$$\mathrm{M}_{\lambda_1, \lambda_2}(\eta) = 0. \tag{4.5}$$

Далее для оценки Q

$$\mathrm{M}_{\lambda_1, \lambda_2}(\eta \cdot Q) = C(\lambda) \iint \psi \cdot Q \bar{e}^{(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)}\, dt_1\, dt_2 = C(\lambda) D\big((\lambda_1^2 - \lambda_2)^m V(\lambda_1, \lambda_2)\big) \tag{4.6}$$

где дифференциальный оператор

$$D = \sum a_{i_1 i_2} \frac{\partial^{i_1 + i_2}}{\partial \lambda_1^{i_1} \partial \lambda_2^{i_2}}.$$

Ясно, что при условии $\lambda_1^2 = \lambda_2$ из (4. 6)

$$\mathrm{M}_{\lambda_1}(\eta \cdot Q) = V(\lambda_1, \lambda_1^2)[P(\lambda_1)], \tag{4.7}$$

где многочлен $P(\lambda_1)$ не равен тождественно нулю и можно найти такой компакт Λ_0, который не содержит ни одного нуля многочлена $P(\lambda)$. На этом компакте

$$\mathrm{M}_\lambda(\eta \cdot Q) \neq 0 \qquad \text{(можно считать, что} > 0). \tag{4.8}$$

Далее ясно, что

$$\mathrm{M}_\lambda(\eta^2) \leqq K_0 < \infty \tag{4.9}$$

и если рассматривать статистику

$$\tilde{Q} = Q - \gamma \cdot \eta \tag{4.10}$$

то

$$\mathrm{M}_\lambda(\tilde{Q})^2 = \mathrm{M}_\lambda(Q)^2 - 2\gamma \mathrm{M}_\lambda(\eta \cdot Q) + \gamma^2 \mathrm{M}_\lambda(\eta^2) \tag{4.11}$$

и константу γ можно выбрать так, чтобы

$$-2\gamma \mathrm{M}_\lambda(\eta Q) + \gamma^2 \mathrm{M}_\lambda(\eta^2) < 0, \tag{4.12}$$

на $\lambda \in \Lambda_0$, откуда и следует недопустимость оценки $Q(\chi_1, \chi_2)$ на Λ_0. Тем самым доказана наша теорема.

Заметим еще, что при $m = 1$, т. е. когда Q имеет вид

$$Q(\chi_1, \chi_2) = a_1 \chi_1 + a_2 + \chi_2 \qquad (a_i \neq 0,\ a_i > 0,\ i = 1, 2),$$

то

$$\mathrm{M}_\lambda(\eta \cdot Q) = V(\lambda_1, \lambda_1^2)[a_2 - 2a_1 \lambda_1]$$

и

$$\mathrm{M}_\lambda(\eta \cdot Q) = \begin{cases} > 0 & \text{при} \quad \lambda > \dfrac{a_2}{2a_1} \\ < 0 & \text{при} \quad \lambda > \dfrac{a_2}{2a_1} \end{cases}$$

Следствие 1. Ни χ_1 ни χ_2 отдельно не является допустимой оценкой $1/\lambda$ на любом компакте Λ_0.

Следствие 2. Полиномы $Q_1(\chi_1)$ и $Q_2(\chi_2)$ не являются допустимыми оценками на любом компакте Λ_0 функций

$$f_1(\lambda) = \mathrm{M}_\lambda Q_1, \quad f_i(\lambda) = \mathrm{M}_\lambda Q_2.$$

Эти следствия получаются дословным повторением предыдущего доказательства.

В случае дискретного времени такое же положение имеет место.

БИБЛИОГРАФИЯ

[1] ARATÓ, M.: Оценка параметров стационарного гауссовского марковского процесса, *Докл. Акад. Наук. СССР* **145** (1962) № 1, 13—16.

[2] ARATÓ, M.: Некоторые статистические вопросы стационарных гауссовских марковских процессов, Диссертация, Москва М. Г. У. 1962.

[3] ARATÓ, M.: Вычисление доверительных границ для параметра „затухания" комплексного стационарного гауссовского процесса. (В печати в журнале Теор. Вероятност. и Применен.).

[4] Колмогоров, А. Н.: Несмещенные оценки, *Изв. Акад. Наук. СССР* Сер. Мат. № 4 (1950) 303—326.

[5] Леманн Э.: *Проверка статистических гипотез,* (Английское издание в 1959) New York

[6] Лииник, Ю. В.: *Статистические задачи с мешающими параметрами,* Москва, 1966.

[7] Паламодов, В. П.: О проверке многомерной полиномиальной гипотезы, *Докл. Акаб. Наук. СССР* **172** (1966) № 2, 291—293.

[8] STRIEBEL, CH.: Densities for Stochastic Processes, *Ann. Math. Stat.* **30** (1959) 559—567

[9] WIJSMAN, R. A.: Incomplete suffcient statistics and similar tests, *Ann. Math. Stat.* **29** (1958), 1028—1045.

[10] HÖRMANDER, L.: On the theory of general partial differential operators. *Acta Math.* **94** (1955) 161—248.

Вычислительный Центр Академии Наук Венгрии, Будапешт

(Поступила 21-ого марта 1967 г.)